УДК 51-77
JEL: C02

DOI 10.33278/SAE-2020.book1.444-447

MODERN METHODS OF MODELLING THE STRUCTURE OF THE INVESTMENT PORTFOLIO

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ

Alexey V. Sergeev [1] ORCID 0000-0003-4944-7412

Алексей Вячеславович Сергеев [1]

[1] Financial University under the Government of the Russian Federation

[1] Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации

Keywords: *modeling, probability, uncertainty, investment portfolio*

Ключевые слова: *моделирование, вероятность, неопределенность, инвестиционный портфель*

First of all, it is necessary to pay attention to the classical methods of financial mathematics when considering various approaches to designing an investment portfolio. They consider deterministic models of financial transactions. These models consist of information that has complete reliability of time and financial indicators. At the same time, the simplest financial transactions are based on classical methods, which makes it possible to establish basic schemes for working with various financial instruments.

Deterministic models calculate the value of assets at a certain date, taking into account such important factors as the time rule, the characteristics of the cash flow, the interest rate (in the case of credit transactions), profitability (in case a debt financial instrument is considered), the period of the transaction, interest accrual scheme, commissions, taxes, the position of the investor, etc.

That is, one can talk about the use of a "direct" accumulative model, which allows calculating the accumulated income from a financial transaction or the accumulated amount of the deposit, taking into account a given interest rate. But it is also worth noting the inverse problem, which is much

Прежде всего, при рассмотрении различных подходов к проектированию инвестиционного портфеля необходимо обратить внимание на классические методы финансовой математики. Они рассматривают детерминированные модели финансовых транзакций. Эти модели состоят из информации, имеющей полную достоверность временных и финансовых показателей. В то же время простейшие финансовые операции основаны на классических методах, что позволяет установить базовые схемы работы с различными финансовыми инструментами. Детерминированные модели рассчитывают стоимость активов на определенную дату, принимая во внимание такие важные факторы, как правило времени, характеристики денежного потока, процентная ставка (в случае кредитных операций), доходность (в случае рассмотрения долгового финансового инструмента), период операции, схема начисления процентов, комиссии, налоги, позиция инвестора и т. д.

То есть можно говорить об использовании «прямой» накопительной модели, позволяющей рассчитать накопленный доход от финансовой операции или накопленную сумму депозита с учетом заданной процентной ставки. Но также стоит отметить обратную задачу, more often solved in the investment process. In this case, one can talk about finding the profitability at a given value of the price of a certain asset (portfolio of assets).

To the factors described, one can add such a factor as the inflation rate, data on which are published in official sources (for the Russian Federation – by the Bank of Russia). At the same time, the inclusion of this factor in the model can introduce some uncertainty, which will be discussed in another part of the paper.

Turning to the consideration of transactions with investment portfolios, it should be noted that the methods of classical financial mathematics are applied here to the same extent, that is, when calculating the simplest transactions.

The fundamental difference will be the presence of such a concept as a transaction portfolio – a set of assets participating in a transaction, indicating their absolute and relative amounts. A change in weights entails a change in the profitability of the entire portfolio. The investor's task is to find a combination of asset weights that can provide him with the maximum return on the entire portfolio.

However, it should be noted that finding the optimal portfolio in most cases is not a trivial task. The difficulty lies in the fact that the real market is characterized by a stochastic nature of behaviour, which entails the need to use other methods when conducting financial analysis. Financial decision-making is carried out in a state of uncertainty and risk, characteristics that are described using the concepts of "mathematical expectation" (mean value of a random variable) and "variance" (the degree of deviation of a random variable from its mean value). In Markowitz's investment theory, it is the variance (the root of the variance) that, in fact, is a measure of the risk of an asset, when the mathematical expectation is its return. Using the simplest probabilistic market model, several future market conditions (e.g. good, bad, average) can be considered. Each state can be realized with a certain probability.

Accordingly, the profitability of assets traded on the market can be considered as discrete random variables that take their values with a probability that depends on the specific state of the market. The expected return on each asset can be calculat-

которая гораздо чаще решается в инвестиционном процессе. В данном случае речь идет о нахождении доходности при заданном значении цены определенного актива (портфеля активов). К описанным факторам можно добавить такой фактор, как уровень инфляции, данные о котором публикуются в официальных источниках (по Российской Федерации – Банком России). В то же время включение этого фактора в модель может внести некоторую неопределенность, о которой пойдет речь в другой части нашей работы.

Переходя к рассмотрению сделок с инвестиционными портфелями, следует отметить, что методы классической финансовой математики применяются здесь в той же мере, то есть при расчете простейших сделок. Принципиальным же различием будет являться наличие такого понятия, как портфель сделки – набор активов, участвующих в сделке, с указанием абсолютных и относительных их количеств.

Изменение весов влечет за собой изменение доходности всего портфеля. Задача инвестора сводится к поиску комбинации весов активов, которые могут обеспечить ему максимальную доходность всего портфеля. Хотя стоит отметить, что поиск оптимального портфеля в большинстве случаев задача нетривиальная.

Сложность заключается в том, что реальному рынку присущ стохастический характер поведения, что влечет за собой необходимость использования иных методов при проведении финансового анализа.

Принятие финансовых решений осуществляется в состоянии неопределенности и риска, характеристик, которые описываются с помощью понятий «математическое ожидание» (среднее значение случайной величины) и «дисперсия» (степень отклонения случайной величины от ее среднего значения). В теории инвестиций Марковица именно дисперсия (корень из дисперсии), по сути, представляет собой меру риска актива, когда математическое ожидание есть его доходность. Применяя простейшую вероятностную модель рынка, можно рассматривать несколько будущих состояний рынка (к примеру, хорошее, плохое, среднее). Каждое состояние может реализоваться с определенной вероятностью.

Соответственно, доходность активов, обращающихся на рынке, можно рассматривать как дискретные случайные величины, принимающие свои значения с вероятностью, ed as the mathematical expectation of a random variable.

Taking into account the fact that ideal assets

(assets with the highest profitability and minimal risk) do not exist on the market (otherwise, most investors immediately rush to conduct transactions with them, and the asset immediately changes its “ideal” characteristics), many investors tend to build a portfolio of several assets. Thus, there is a diversification of risk, that is, a decrease in its value. The degree of diversification depends on the characteristic that serves as a measure of the relationship between random values representing the return on assets. To determine directly the measure of the covariance coefficient, its normalized value, called the correlation coefficient, is used.

In general, it turns out that the market can be described using two sets of parameters – the vector of expected asset returns and the covariance matrix, which, in turn, constitute the so-called parametric market model. Based on the collected statistical data on the specified parameters, the investor can solve most of the tasks associated with investment.

The same goes for describing the characteristics of an investment portfolio. The portfolio can be specified by the vector of expected returns on the assets included in it and the covariance matrix. Since the mathematical expectation of the sum of two random variables is equal to the sum of their mathematical expectations, it turns out that the expected return on the entire portfolio is a random variable depending on the expected return on the assets that make it up.

That is, the expected return on a portfolio with a vector of weights x = (x1, x2, ..., xn) will be a random variable Rπ = x1 R1 + x2 R2 + ... + xn Rn, where R1, R2, ... Rn are the expected returns, respectively, of assets A1 , A2,…, An. A portfolio estimate with a given weight vector is a pair of numbers (E (Rπ), V (Rπ)), where E (Rπ) is the expected return on the portfolio, and V (Rπ) is the portfolio risk.

Accordingly, the compilation of the optimal portfolio is accompanied by the search for such assets so that the portfolio’s profitability is as large as possible, and its risk is as small as possible. It

зависящей от конкретного состояния рынка. Ожидаемая доходность каждого актива может быть рассчитана как математическое ожидание случайной величины. Принимая во внимание тот факт, что идеальных активов (активы, у которых доходность максимальна, а риск минимален) на рынке не существует (иначе к проведению операций с ними мгновенно устремляется большинство инвесторов, и актив тут же меняет свои «идеальные» характеристики), многие инвесторы стремятся составить портфель из нескольких активов. Таким образом, происходит диверсификация риска, то есть уменьшение его значения. Степень диверсификации зависит от характеристики, служащей мерой связи между случайными величинами, представляющими доходности активов. Речь идет о ковариации и корреляции. Для определения непосредственно меры коэффициента ковариации используют его нормированное значение, называемое коэффициентом корреляции.

В целом, получается, что рынок можно описать с помощью двух наборов параметров – вектора ожидаемых доходностей активов и матрицей ковариации, которые, в свою очередь, составляют так называемую параметрическую модель рынка. На основании собранных статистических данных по указанным параметрам, инвестор может решать большую часть задач, связанных с инвестированием.

То же самое касается и описания характеристик инвестиционного портфеля. Портфель может быть задан вектором ожидаемых доходностей активов, входящих в него, и матрицей ковариации. Так как математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий, получается, что ожидаемая доходность всего портфеля является случайной величиной, зависящей от ожидаемой доходности активов, его составляющих.

То есть, ожидаемая доходность портфеля с вектором весов x=(x1,x2,…,xn) будет случайная величина Rπ=x1 R1+x2 R2+ ... +xn Rn, где R1, R2, … Rn – ожидаемые доходности соответственно активов A1, A2, …, An.

Оценкой портфеля с заданным вектором весов называется пара чисел (E(Rπ),V(Rπ)), где E(Rπ) – ожидаемая доходность портфеля, а V(Rπ) – риск портфеля. Соответственно, составление оптимального портфеля сопровождается поиском таких активов, чтобы доходность портфеля turns out that in this case it is necessary to solve a two-criteria problem. Another important condition is the position of the investor. As is known, an investor can take both long and short positions in transactions with financial assets.

In accordance with the position of the investor, two models in portfolio theory can be distinguished – the Markowitz model and the Black model. The Markowitz model differs in that the weights of assets in the portfolio cannot take negative values, that is, it is assumed that the investor does not take short positions in terms of the assets included in the portfolio. The Black model provides for this possibility. Accordingly, the weights of assets can be both positive and negative.

была максимально большой, а его риск максимально малым. Получается, в данном случае необходимо решение двукритериальной задачи. Еще одним важным условием является позиция инвестора. Как мы знаем, инвестор может занимать как длинную, так и короткую позицию в операциях с финансовыми активами. В соответствии с позицией инвестора можно различать две модели в портфельной теории – модель Марковица и модель Блэка. Модель Марковица отличается тем, что веса активов в портфеле не могут принимать отрицательных значений, то есть предполагается, что инвестор по активам, входящим в портфель, не занимает коротких позиций. Модель Блэка предусматривает такую возможность. Соответственно и веса активов могут быть как положительные, так и отрицательные.

References / Библиография

1. Al-Nator M.S., Kasimov Yu.F., Kolesnikov A.N. Fundamentals of financial calculations (formulas, facts, examples, problems and tests): a tutorial. Part 3. Moscow, Financial University, 2014. 152 p.
2. Brusov P.N. Financial mathematics: a tutorial. Moscow, KNORUS, 2010. 224 p.
3. Gisin V.B., Didenko A.S., Putko B.A. Mathematical foundations of financial economics: textbook. Moscow, Prometheus, 2018. 170 p.
4. Kolemaev V.A., Kandrat'ev I.S. Optimal decision methods. Workshop: study guide. Moscow, KNORUS, 2017. 194 p.
5. Sevastyanov B.A. Course in probability theory and mathematical statistics.Moscow, Science, Main edition of physical and mathematical literature, 1982. 256 p.

1. Аль-Натор М.С., Касимов Ю.Ф., Колесников А.Н. Основы финансовых вычислений (формулы, факты, примеры, задачи и тесты): учебное пособие. Часть 3. М.: Финансовый университет, 2014. 152 с.
2. Брусов П.Н. Финансовая математика: учебное пособие. М. : КНОРУС, 2010. 224 с.
3. Гисин В.Б., Диденко А.С., Путко Б.А. Математические основы финансовой экономики: учебное пособие. М.: Прометей, 2018. 170 с.
4. Колемаев В.А., Кандратьев И.С. Методы оптимальных решений. Практикум: учебное пособие. М.: КНОРУС, 2017. 194 с.
5. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука; Главная редакция физико-математической литературы, 1982. 256 с.