DOI 10.33278/SAE-2018.rus.243-246
УДК 338.27
JEL P50

ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СИСТЕМ ОДНОВРЕМЕННЫХ УРАВНЕНИЙ: ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕТОДОВ

Людмила Олеговна Бабешко (ORCID 0000-0002-7692-3894)

ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

Аннотация. Статья посвящена взаимосвязи методов оценки параметров систем одновременных уравнений (СОУ). СОУ используется для моделирования сложных экономических объектов и представляет собой систему взаимозависимых уравнений, в которых переменные в правой части регрессионных уравнений определяются одновременно с зависимыми переменными. Это порождает проблему эндогенности и приводит к смещенным и несостоятельным оценкам. Для решения проблемы эндогенности регрессоров разработан целый арсенал специальных методов: метод инструментальных переменных (МИП), косвенный метод наименьших квадратов (КМНК), двухшаговый метод наименьших квадратов (ДМНК), трехшаговый метод наименьших квадратов (ТМНК).
В статье на эмпирическом примере показана взаимосвязь ДМНК и МИП, КМНК и ДМНК, КМНК и МНК с ограничениями на структурные параметры, эквивалентность точечных оценок параметров и их автоковариационных матриц.

Ключевые слова: система одновременных уравнений, метод инструментальных переменных, ограничения на параметры, оценки параметров, автоковариационная матрица оценок параметров.

Abstract. The article is devoted to the interrelation between the methods of estimating the parameters of simultaneous equations. The Simultaneous equations is used to model complex economic objects, and is a system of interdependent equations in which the variables on the right of the regression equations are determined simultaneously with the dependent variables. This raises the problem of endogeneity, and leads to biased and untenable evaluations. To solve the problem of endogenous regressors, a whole arsenal of special methods has been developed: the method of instrumental variables (*IV*), the indirect least squares method (*ILS*), the two-step least squares method (2*SLS*), three-step least-squares method (3*SLS*). In the article, on an empirical example, the relationship between 2*SLS* and *IV*, *ILS* and 2*SLS*, *ILS* and *OLS*- estimator with constraints on structural parameters is shown. Equivalence of point estimates of parameters and their autocovariance matrices is shown.

Keywords: Keywords: system of simultaneous equations, instrumental variables method, parameter constraints, parameter estimates, autocovariance matrix of parameter estimates.

Для описания сложных экономических объектов в эконометрике используются системы уравнений: системы независимых уравнений, системы внешне не связанных уравнений, системы одновременных уравнений, в которых одни и те же переменные в одних уравнениях являются эндогенными, а в других — регрессорами. Эта особенность СОУ вызывает проблему эндогенности регрессоров и неприменимости МНК к оценке параметров структурной формы модели (результата формализации исследуемых закономерностей)

$$A \cdot Y_t + B \cdot X_t = V_t, \qquad (1)$$

где A, B — матрицы структурных параметров, Y_t — $(m \times 1)$-вектор столбец значений эндогенных переменных, X_t — $(k \times 1)$— вектор столбец значений предопределенных переменных, V_t — $(m \times 1)$— вектор столбец случайных возмущений, t — номер наблюдения. К приведенной форме СОУ (результат представления вектора эндогенных переменных в явном виде):

$$Y_t = MX_t + U_t,\ M = -A^{-1}B,$$
$$U_t = A^{-1}V_t, \qquad (2)$$

МНК для оценки параметров применим, однако спецификация (2) при преобразовании теряет часть взаимосвязей между переменными. Для оценки параметров СОУ разработаны специальные эконометрические методы: косвенный МНК (КМНК), двухшаговый МНК (ДМНК), которые решают проблему эндогенности переменных, возникающую при оценке структурных параметров системы, и являются разновидностями метода инструментальных переменных (МИП). В работе рассматривается взаимосвязь методов оценки параметров СОУ на эмпирическом примере модели хозяйственной деятельности предприятия [3]:

$$Y_1 = a_{10} + a_{12}Y_2 + b_{11}X_1 + v_1,$$
$$Y_2 = a_{20} + a_{23}Y_3 + v_2, \quad (3)$$
$$Y_3 = a_{30} + a_{32}Y_2 + b_{32}X_2 + v_3.$$

Вектор эндогенных переменных системы (3) включает элементы: Y_1 — объем продукции (в тыс. штук); Y_2 — количество работающих (в тыс. человек); Y_3 — стоимость основных фондов (в млн. злотых), вектор экзогенных переменных: X_1 — использованное сырьё (в тыс. тонн); X_2 — инвестиции (в млн. злотых). Данные за 11 лет приведены в таблице 1.

Таблица 1

Данные за последовательные 11 лет

t	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	*t*	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2
1	46	3,4	24	2,3	1,0	7	57	3,9	28	3,4	1,1
2	48	3,4	25	2,4	1,1	8	59	4,0	29	3,4	1,3
3	49	3,5	25	3,2	1,1	9	59	4,3	31	3,5	1,5
4	52	3,7	26	3,4	1,0	10	60	4,5	33	3,5	1,6
5	52	3,8	27	3,4	1,1	11	61	4,8	35	3,6	1,7
6	54	3,8	27	3,4	1,2						

Источник: [3]

Для решения проблемы эндогенности, присущей СОУ и приводящей к смещённым и несостоятельным оценкам, используется метод инструментальных переменных. В качестве инструментов, замещающих регрессоры, коррелирующие с возмущением, используются переменные, сильно коррелирующие с данным регрессором и не коррелирующие с возмущением модели. Обобщенная оценка метода инструментальных переменных ОМИП [4]:

$$\hat{\beta}_{МИП} = \left(X^T P_Z X\right)^{-1} X^T P_Z Y, \quad (4)$$

где $P_Z = Z\left(Z^T Z\right)^{-1} Z^T$ — проектор на подпространство инструментальных переменных, Z — матрица инструментальных переменных, применяется в случае, если число инструментов больше числа замещаемых регрессоров ($p > k$). Автоковариационная матрица оценок параметров вычисляется по формуле:

$$\hat{C}_{\hat{\beta}\hat{\beta}} = \hat{\sigma}^2\left(X^T P_Z X\right)^{-1} =$$
$$\hat{\sigma}^2\left(X^T Z\left(Z^T Z\right)^{-1} Z^T X\right)^{-1}. \quad (5)$$

Задача выбора инструментальных переменных не всегда решается просто. Одним из способов является замена переменной на её оценку. Применительно к первому уравнению структурной формы СОУ (3), в качестве инструмента для эндогенного регрессора Y_2 в МИП можно использовать её оценку, полученную в рамках регрессии на все экзогенные переменные модели:

$$\hat{Y}_2 = \hat{m}_{21} + \hat{m}_{22}X_1 + \hat{m}_{23}X_2 =$$
$$\underset{(0{,}283)}{1{,}171} + \underset{(0{,}102)}{0{,}295} \cdot X_1 + \underset{(0{,}184)}{1{,}440} \cdot X_2, \quad (6)$$

где X_1 — сырье, X_2 — инвестиции. Ниже приведен результат оценивания СОУ в рамках МИП (4)-(6):

$$\hat{Y}_1 = \underset{(5{,}516)}{10{,}667} + \underset{(2{,}056)}{8{,}278} \cdot Y_2 + \underset{(2{,}035)}{3{,}462} \cdot X_1, \quad (7)$$

$$\hat{C}_{\hat{\beta}\hat{\beta}} = \hat{\sigma}^2 \left(X^T Z \left(Z^T Z \right)^{-1} Z^T X \right)^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 30{,}424 & -6{,}619 & -1{,}285 \\ -6{,}619 & 4{,}227 & -3{,}081 \\ -1{,}285 & -3{,}081 & 4{,}139 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Такая процедура в теории СОУ получила название двухшаговый МНК (ДМНК). КМНК применяется для точно идентифицируемых уравнений и состоит из следующих шагов [2]: по структурной форме модели (1) строится приведенная форма (2); по данным таблицы 1 определяются МНК-оценки параметров приведенной формы:

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{Y}_1 = \hat{m}_{11} + \hat{m}_{12} X_1 + \hat{m}_{13} X_2 = \\ = \underset{(5{,}031)}{20{,}358} + \underset{(1{,}812)}{5{,}908} \cdot X_1 + \underset{(3{,}274)}{11{,}923} \cdot X_2, \\ \hat{Y}_2 = \hat{m}_{21} + \hat{m}_{22} X_1 + \hat{m}_{23} X_2 = \\ = \underset{(0{,}283)}{1{,}171} + \underset{(0{,}102)}{0{,}295} \cdot X_1 + \underset{(0{,}184)}{1{,}440} \cdot X_2, \\ \hat{Y}_3 = \hat{m}_{31} + \hat{m}_{32} X_1 + \hat{m}_{33} X_2 = \\ = \underset{(2{,}013)}{7{,}716} + \underset{(0{,}725)}{1{,}709} \cdot X_1 + \underset{(0{,}184)}{12{,}005} \cdot X_2 \end{array}\right\}, \quad (9)$$

по МНК-оценкам параметров приведенной формы (9), используя уравнение взаимосвязи структурных и приведенных параметров

$$\overline{A} \cdot \begin{pmatrix} M \\ I \end{pmatrix} = 0, \quad (10)$$

$$\overline{A} = \left(A \middle| B \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -a_{12} & 0 & -a_{10} & -b_{11} & 0 \\ 0 & 1 & -a_{23} & -a_{20} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1 & -a_{30} & 0 & -b_{32} \end{array}\right)$$

где I — единичная матрица $k \times k$, вычисляются оценки параметров структурной формы, например, для первого уравнения системы (3):

$$m_{11} - a_{12} m_{21} - a_{10} = 0$$

$$m_{12} - a_{12} m_{22} - b_{11} = 0$$

$$m_{13} - a_{12} m_{23} = 0$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & m_{21} \\ 0 & 1 & m_{22} \\ 0 & 0 & m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{10} \\ b_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Таким образом, КМНК-оценки структурных параметров первого уравнения системы (3) равны: $\hat{a}_{12} = 8{,}278$, $\hat{b}_{11} = 3{,}465$, $\hat{a}_{10} = 10{,}667$, и совпадают с их ДМНК-оценками (см.(7)). Для определения автоковариационной матрицы КМНК-оценок параметров сформулируем задачу их оценивания как МНК-оценивание с линейными ограничениями на параметры [1]: $H_0 : H\beta = r$, β — $(k \times 1)$ - вектор параметров, r — вектор констант ограничений $(q \times 1)$, H — матрица ограничений $(q \times k)$, $ranr(H) = q$, $q \le k$,

$$\hat{\beta}_R = \hat{\beta}_{UR} + b, \quad (12)$$

где $\hat{\beta}_{UR} = \left(X^T X \right)^{-1} X^T Y$ — МНК-оценка параметров без учёта ограничений, $\hat{\beta}_R$ — МНК- оценка параметров при наличии ограничений, b — коэффициент корректировки:

$$b = (X^T X)^{-1} H^T (H (X^T X)^{-1} H^T)^{-1} (r - H\hat{\beta}_{UR}) =$$
$$= Kr - KH\hat{\beta}_{UR}, \quad (13)$$

$$V = \left[H (X^T X)^{-1} H^T \right]^{-1}, \; K = (X^T X)^{-1} H^T V.$$

Оценим первое уравнение модели (3) МНК без учета ограничений:

$$Y_{1t} = \underset{(5{,}406)}{10{,}788} + \underset{(1{,}970)}{3{,}518} \cdot X_{1t} + \underset{(1{,}934)}{8{,}201} \cdot Y_{2t} + \underset{(1{,}937)}{e_t},$$

МНК-оценки структурных параметров $\hat{\beta}_{UR} = (a_{10};\; b_{11};\; a_{12})^T$ — смещенные и несостоятельные в силу проблемы эндогенности. Для вычисления корректировочного члена (13) в качестве ограничений на параметры рассмотрим взаимосвязь (11) между матрицами структурных $\overline{A}$ и приведенных M параметров, используя в качестве матрицы ограничений H и вектора r констант ограничений МНК-оценки параметров приведенной формы (9):

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \hat{m}_{21} \\ 0 & 1 & \hat{m}_{22} \\ 0 & 0 & \hat{m}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1{,}171 \\ 0 & 1 & 0{,}295 \\ 0 & 0 & 1{,}440 \end{pmatrix},$$

$$r = \begin{pmatrix} \hat{m}_{11} \\ \hat{m}_{12} \\ \hat{m}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20{,}358 \\ 5{,}908 \\ 11{,}923 \end{pmatrix}.$$

Оценки параметров структурного уравнения СОУ (3) в рамках МНК с ограничениями на структурные параметры:

$$\hat{Y}_1 = \underset{(5{,}516)}{10{,}667} + \underset{(2{,}056)}{8{,}278} \cdot Y_2 + \underset{(2{,}035)}{3{,}462} \cdot X_1, \quad (14)$$

совпадают с КМНК-оценками и ДМНК-оценками, решающими проблему эндогенности. Стандартные ошибки коэффициентов модели (14) получены по оценке автоковариационной матрицы вектора (12):

$$C_{RR} = Cov\left\{\hat{\beta}_{UR} + b, \hat{\beta}_{UR} + b\right\} =$$
$$= Cov\left\{\hat{\beta}_{UR}, \hat{\beta}_{UR}\right\} + 2Cov\left\{b, \hat{\beta}_{UR}\right\} + Cov\{b, b\} =$$
$$= C_{\hat{\beta}\hat{\beta}} - KHC_{\hat{\beta}\hat{\beta}}H^T K^T + KC_{rr}K^T = KC_{rr}K^T,$$

где $Cov\left\{\hat{\beta}_{UR}, \hat{\beta}_{UR}\right\} = C_{\hat{\beta}\hat{\beta}}$ — автоковариационная матрица оценок параметров без ограничений, C_{rr} — автоковариационная матрица оценок ограничений.

В статье на эмпирическом примере показана эквивалентность оценок параметров и их автоковариационных матриц в рамках основных методов оценки параметров СОУ. В результате формализации алгоритма КМНК как МНК с ограничениями на параметры получена формула оценки автоковариационной матрицы КМНК-оценок параметров.

Список источников

1. Бабешко Л.О. Взаимосвязь эконометрических методов оценки параметров систем одновременных уравнений/Л.О. Бабешко // Фундаментальные исследования. — 2018. — № 2. — С.51-56.
2. Бабешко Л.О. Эконометрика и эконометрическое моделирование: учебник / Л.О. Бабешко, М.Г. Бич, И.В. Орлова. — М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2017. — 400 с.
3. Талызин В.А., Кирпичников А.П., Аглиуллин И.Н. Оценивание параметров системы взаимозависимых уравнений с ограничениями на структурные параметры в задачах эконометрики/ В.А. Талызин, А.П. Кирпичников, И.Н. Аглиуллин//Вестник технологического университета, -2015. Т.18, №16, С.246-248.
4. Эббес П. Инструментальные переменные и эндогенность: нетехнический обзор / П. Эббес //Квантиль. - 2007. - № 2, С.3-20.