DOI 10.33278/SAE-2018.rus.239-242
УДК 510.644
JEL D83

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОТНОШЕНИЙ ТОЛЕРАНТНОСТИ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПОЛНЫХ ГЕЙТИНГОВЫХ АЛГЕБРАХ И ГРАНУЛИРОВАНИЕ НЕЧЕТКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Елена Сергеевна Волкова (ORCID 0000-0001-9037-592X)[1],
Владимир Борисович Гисин (ORCID 0000-0002-7269-0587)[1]

[1]ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

Аннотация. В работе рассматриваются отношения толерантности с оценкой интенсивности в полной дистрибутивной решетке. Описываются пространство нечетких признаков и вложение исходного пространства толерантности в пространство классов толерантности. Устанавливается связь описанной конструкции с решетками нечетких понятий. Доказано, что всякое отношение толерантности с оценкой в полной дистрибутивной решетке может быть представлено как композиция отношения объект-признак и его обратного. На примере показано, что указанное представление может быть не единственным даже с учетом требования минимальности. Структура минимальных представлений достаточно сложна и требует дальнейших исследований.

Ключевые слова: отношение толерантности; дистрибутивная решетка; представление знаний; информационные гранулы.

Abstract. Tolerance relations with an estimate of the intensity in a complete distributive lattice are considered. Given a tolerance relation we construct the space of fuzzy attributes and embed the original space of tolerance in the space of classes of tolerance. The connection of the described construction with the lattices of fuzzy concepts is established. It is proved that any tolerance relation with an estimate in a complete distributive lattice can be represented as a composition of the object-attribute relation and its inverse. The example shows that the above representation may not be unique, even with the minimum requirement. The structure of minimal representations is rather complicated and requires further research.

Keywords: tolerance relation; distributive lattice; knowledge representation; information granules.

В работе рассматриваются отношения толерантности с оценкой интенсивности в полной дистрибутивной решетке (гейтинговой алгебре). Описываются пространство нечетких признаков и отображение исходного пространства толерантности в пространство классов толерантности. Стимулом для написания работы послужили исследования в двух областях современной науки о данных. С одной стороны, это формальный контекстный анализ в его нечеткой версии (см. [1]). С другой, это нечеткая кластеризация и выделение информационных гранул (см. [2], [3]).

С точки зрения традиционной логики, каждое понятие характеризуется своим содержанием (совокупностью отличительных признаков) и объемом (совокупностью всех объектов, обладающих отличительными признаками). В дальнейшем, чтобы не возникало путаницы, мы в качестве термина, обозначающего логическое понятие, будем использовать слово «концепция». Математическая модель понятия концепции была предложена в 1980 гг. в работах Вилле (см. [4], [5]). Затем теория концепций развивалась как в рамках традиционной математики, так и в контексте многозначных логик и теории категорий [6], [7], [8], [9].

Понятие концепции формализуется в рамках общей теории бинарных отношений. Так, формальным контекстом называется тройка (G, M, I), где G — множество объектов, M — множество признаков, а $I \subseteq G \times M$ — отношение инцидентности, связывающее объекты и признаки. Формальный контекст порождает соответствие Галуа между множеством всех подмножеств множества объектов и множеством всех подмножеств множества признаков. Произвольному множеству объектов $A \subseteq G$ соответствует множество признаков $A' \subseteq M$, содержащее все признаки, которыми обладает каждый объект из A. Аналогичным образом произвольному множеству признаков $B \subseteq M$ соответствует множество объектов $B' \subseteq G$, содержащее все объекты, обладающее всеми признаками из B. Формальная концепция в условиях формального контекста определяется как пара (A, B) такая, что $A \subseteq G$, $B \subseteq M$ и при этом $A = B'$ и $A' = B$. При этом A трактуется как объем, а B – как содержание формальной концепции.

Формальный контекст порождает на множестве объектов отношение толерантности (отношение сходства) $T = I \cdot I^{-1}$, которое связывает объекты, имеющие хотя бы один общий признак. В случае, когда интенсивность отношений оценивается в классической бинарной шкале, всякое отношение толерантности может быть представлено таким образом [10], см. также [11].

Иными словами, для произвольного отношения толерантности R на множестве объектов X можно указать формальный контекст (X, Y, S), такой, что $R = S \cdot S^{-1}$. В настоящей работе показано, что этот результат распространяется на случай, когда отношения оцениваются в логической шкале, представляющей собой полную дистрибутивную решетку. Таким образом, нечеткое отношение толерантности погружается в контекст, позволяющий формировать понятия – информационные гранулы.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$ – полная дистрибутивная решетка, и называть ее логической шкалой.

Нечеткое подмножество A множества X со значениями функции принадлежности в логической шкале $\boldsymbol{L}$, или $\boldsymbol{L}$-нечеткое подмножество, задается отображением μ_A: $X \to L$. Если ясно, о какой логической шкале идет речь, мы будем говорить просто о нечетких подмножествах. Иногда вместо $\mu_A(x)$ мы будем писать просто $A(x)$.

При $\alpha \in L$ множество $A^\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}$ называется срезом нечеткого множества A. Если $\beta \geq \alpha$, то $A^\beta \subseteq A^\alpha$. Легко видеть, что $A(x) = \sup\{\alpha \mid x \in A^\alpha\}$. Обратно, пусть задано семейство множеств $(A^\alpha)_{\alpha \in L}$ такое, что $A^\beta \subseteq A^\alpha$ при $\beta \geq \alpha$ и $A^0 = X$. Тогда множества A^α являются срезами нечеткого подмножества A множества X с функцией принадлежности $A(x) = \sup\{\alpha \mid x \in A^\alpha\}$.

На множестве нечетких подмножеств имеется естественный частичный порядок: $A \subseteq B$, если $A^\alpha \subseteq B^\alpha$ для всех $\alpha \in L$.

Легко видеть, что $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A(x) \leq B(x)$.

Нечеткие отношения на множестве X — это нечеткие подмножества декартова произведения $X \times X$. Нечеткое отношение R задается своей функцией принадлежности μ_R: $X \times X \to L$.

Будем называть нечеткое отношение R

– рефлексивным, если $R(x,x) = 1$ для всех $x \in X$,

– симметричным, если $R(x,y) = R(y,x)$ для всех $x, y \in X$,

– транзитивным, если $R(x,y) \wedge R(y,z) \leq R(x,z)$ для всех $x, y, z \in X$.

Нечеткое отношение R рефлексивно, симметрично или транзитивно, если соответствующим свойством обладает каждый его срез, рассматриваемый как бинарное отношение.

Рефлексивное и симметричное нечеткое отношение называется нечетким отношением толерантности. Транзитивное нечеткое отношение толерантности называется нечетким отношение эквивалентности.

Пусть R: $X \times X \to L$ — нечеткое отношение толерантности. Следуя [12], будем говорить, что нечеткое подмножество K множества X является предклассом толерантности, если $K^\alpha \times K^\alpha \subseteq R^\alpha$ при всех $\alpha \in L$. Предкласс толерантности будем называть классом толерантности, если он является максимальным среди предклассов относительно включения.

Лемма 1. Всякий предкласс толерантности содержится в некотором классе толерантности.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся леммой Цорна, показав, что всякая цепь предклассов имеет верхнюю грань. Пусть $(K_i)_{i \in I}$ — некоторая цепь предклассов. Определим нечеткое подмножество K, полагая $K^\alpha = \cup_{i \in I} K_i^\alpha$. Очевидно, K служит верхней гранью цепи $(K_i)_{i \in I}$ в классе всех нечетких подмножеств. Осталось показать, что K является предклассом. Пусть $x, y \in K^\alpha$. Тогда $x \in K_i^\alpha$ и $y \in K_j^\alpha$ для некоторых $i, j \in I$. Считая для определенности, что $K_i^\alpha \subseteq K_j^\alpha$, приходим к выводу, что $(x, y) \in K_j^\alpha \times K_j^\alpha \subseteq R^\alpha$.

Лемма 2. Для любого элемента $a \in X$ имеется такой предкласс толерантности K, что $K(a) = 1$.

Доказательство. В самом деле, достаточно положить $K^\alpha = \{a\}$ при $\alpha > 0$ и $K^0 = X$.

Из лемм 1 и 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Для любого элемента $a \in X$ имеется такой класс толерантности K, что $K(a) = 1$.

Лемма 3. Для любых $a, b \in X$ справедливо равенство
$R(a, b) = \sup_K(K(a) \wedge K(b))$,
где K пробегает множество классов толерантности.

Доказательство. Несложно заметить, что имеется предкласс K', такой, что $K'(a) \wedge K'(b) \geq R(a, b)$. Достаточно, определить K', полагая $K'^\alpha = \{a, b\}$ при $\alpha \leq R(a, b)$ и $K'^\alpha = \varnothing$, если это не так. Далее, по лемме 1 предкласс содержится в некотором классе толерантности K. Но тогда $K(a) \wedge K(b) \geq R(a, b)$, так что $\sup_K(K(a) \wedge K(b)) \geq R(a, b)$.

Обратно, пусть K — класс толерантности и $K(a) \wedge K(b) = \alpha$. Тогда $(a, b) \in K^\alpha \times K^\alpha$, и, значит, $(a, b) \in R^\alpha$, т.е. $R(a, b) \geq \alpha$.
Следовательно, $R(a, b) \geq \sup_K(K(a) \wedge K(b))$.

Обозначим через Y множество классов толерантности. Для класса толерантности K и элемента $a \in X$ положим $S(a, K) = K(a)$. По определению композиции нечетких бинарных отношений имеем
$(SS^{-1})(a, b) = \sup_K (S(a, K) \wedge S^{-1}(K, b)) =$
$= \sup_K (K(a) \wedge K(b))$.

С учетом теоремы 1 и леммы 3 приходим к равенству следующему результату.

Теорема 2. Для произвольного $\boldsymbol{L}$-нечеткого отношения толерантности R существует $\boldsymbol{L}$-нечеткое отношение S, такое, что $SS^{-1} = R$.

Соответствие S играет роль соответствия объект-признак. Представление отношения толерантности R в виде композиции соответствия объект-признак и обратного к нему, вообще говоря, не единственно. Естественно потребовать, чтобы отношение S было минимальным в том смысле, что никакое его собственное подмножество S' не удовлетворяет соотношению $R = S'S'^{-1}$. В случае, когда отношение толерантности транзитивно, и, значит, является отношением эквивалентности, пространство признаков и отношение объект-признак определены однозначно с точностью до изоморфизма. Заметим, правда, что при работе с $\boldsymbol{L}$-соответствиями, пространство признаков может оказаться не множеством с $\boldsymbol{L}$-нечетким отношением принадлежности, а множеством с $\boldsymbol{L}$-нечетким равенством (см. [13], [14]).

В случае нетранзитивной толерантности минимальные признаковые пространства могут существенно различаться. Проиллюстрируем это простым примером. Пусть $X = \{x, y, z\}$, L — булева алгебра из четырех элементов, $L = \{0, 1, u, v\}$. Зададим отношение толерантности R условиями $R(x,y) = 1$, $R(y,z) = 1$ и $R(x,z) = 0$. В качестве признакового пространства можно взять двухэлементное множество $\{a, b\}$, полагая
$S(x, a) = S(y, a) = S(y, b) = S(z, b) = 1$ и $S(x, b) = S(y, a) = 0$. Легко видеть, что $R = SS^{-1}$ и полученное признаковое пространство минимально. С другой стороны, рассмотрим множество из трех признаков $\{k, l, m\}$ и положим:
$S(y, k) = S(y, l) = S(y, m) = 1$,

$S(x, m) = S(z, k) = 0$,
$S(x, k) = S(z, l) = u$,
$S(x, l) = S(z, m) = v$. Несложно проверить, что и в этом случае $R = SS^{-1}$, а соответствующее признаковое пространство минимально.

Вообще говоря, совокупность минимальных признаковых пространств может иметь сложную структуру. Ее изучение – предмет дальнейших исследований.

Список источников

1. Antoni L., Krajči S., Krídlo O. On Fuzzy Generalizations of Concept Lattices. *Interactions Between Computational Intelligence and Mathematics*. Springer. 2018; 79-103.
2. Pedrycz W. Knowledge-based clustering: from data to information granules. John Wiley & Sons, 2005. 316 p.
3. Ślęzak D., Wasilewski P. Granular sets–foundations and case study of tolerance spaces. *International Workshop on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular-Soft Computing*. Springer. 2007; 435-442.
4. Ganter B., Obiedkov S. Conceptual exploration. Heidelberg, Springer, 2016. 315 p.
5. Ganter B., Wille R. Formal concept analysis: mathematical foundations. Springer, 1999. 284 p.
6. Belohlavek R. Similarity relations in concept lattices. *Journal of Logic and Computation*.2000; 10(6):823-845.
7. Bělohlávek R., Funioková T. Similarity and fuzzy tolerance spaces. *Journal of Logic and Computation*.2004;14(6):827-855.
8. Gottwald S. Universes of fuzzy sets and axiomatizations of fuzzy set theory. Part II: Category theoretic approaches. *Studia Logica*.2006;84(1):23-50.
9. Harding J., Walker C., Walker E. Categories with fuzzy sets and relations. *Fuzzy Sets and Systems*.2014;256(1) 149-165.
10. Шрейдер Ю.А. Пространства толерантности. *Кибернетика*.1970;2:124-128.
Shreider Yu.A. Tolerance spaces. *Kibernetica*. 1970;2:124-128.
11. Александрова А.А. и др. Основы теоретической робототехники. Теория толерантных пространств (обзор). М.: ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 45, 25 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-45
Aleksandrova A.A. et al. Foundations of theoretical robotics. Theory of tolerance spaces. M.: Institute of applied mathematics. 2009. № 45, 25 p.
12. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1974. 254 с.
Shreider Yu.A. Equality, similarity, order. M.: Nauka, 1974. 254 p.
13. Calenko M.S., Gisin V.B., Raikov D.A. Ordered categories with involution. Warzawa: Dissertationes Mathematicae, 1984. 112 p.
14. Gisin V.B. Categories of fuzzy relations in decision making. *Multiperson Decision Making Models Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*. Springer.1990; 80-89.