DOI 10.33278/SAE-2018.rus.213-216
УДК 519.83
JEL D81

К ВОПРОСУ О СВОЙСТВЕ СИНТЕЗИРОВАНИЯ КРИТЕРИЯ ВАЛЬДА-СЭВИДЖА

Лев Григорьевич Лабскер (ORCID 0000-0002-4143-9023)

ФГОБУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

Аннотация. В играх с природой в качестве принципа оптимальности в неблагоприятных экономических условиях часто используют крайне пессимистические выигрыш-критерий Вальда и риск-критерий Сэвиджа. В данной работе вводится в рассмотрение линейная свёртка этих критериев, названная синтетическим критерием Вальда-Сэвиджа с выигрыш-показателем $\alpha \in [0,1]$, выражающим количественно отношение лица, принимающего решение, к выигрышам. Этот критерий даёт возможность оценить оптимальность с синтетической (совместной) позиции выигрышей и рисков. Найдены условия существования и единственности значения выигрыш-показателя, при котором критерий Вальда-Сэвиджа обладает свойством синтезирования, состоящим в существовании стратегии, оптимальной по критерию Вальда-Сэвиджа, но не оптимальной ни по одному из составляющих его критериев.

Ключевые слова: игра с природой; критерий Вальда; критерий Сэвиджа; синтетический критерий Вальда-Сэвиджа; выигрыш-показатель; синтезирование.

Abstract. In games with nature, as an optimality principle in adverse economic conditions, the edge-not pessimistic Wald payoff-criterion and the Savage risk-criterion are often used. In this paper, we introduce a linear convolution of these criteria, called the Wald-Savage synthetic criterion with a payoff-indicator $\alpha \in [0,1]$ expressing the quantitative ratio of the decision-maker to the payoffs. This criterion makes it possible to assess the optimality from the synthetic (joint) position of payoffs and risks. The conditions for the existence and uniqueness of the value of the payoff-indicator are found at which the Wald-Savage criterion has the property of synthesis consisting in the existence of a strategy optimal by the Wald-Savage criterion but not optimal for any of the constituent criteria.

Keywords: game with nature; the Wald criterion; the Savage criterion; the synthetic Wald-Savage criterion; payoff-indicator; synthesizing.

Как известно, принятие решений является наиболее значимой составляющей любого управления.

При анализе задач по принятию финансово-экономических решений полезным оказывается использование модели «Игра с природой» [1, с. 12-59], в которой в качестве принципов оптимальности стратегий выступают различные критерии. Некоторые из них – *выигрыш-критерии* определяют оптимальность с точки зрения выигрышей, абстрагируясь от рисков (например, критерии Вальда [2; 1, с.273-308], максимаксный [1, с.349-362] и др.). Другие – *риск-критерии* наоборот, характеризуют оптимальность с позиций рисков, не учитывая явно выигрышей (например, критерии Сэвиджа [3; 1, с.308-349], миниминный [1, с.362-376] и др.). Широко используются *комбинированные* критерии, составленные из двух выигрыш-критериев или двух риск-критериев. В каждой такой паре один из критериев крайне пессимистический, а другой – крайне оптимистический (например, выигрыш-критерий Гурвица [4; 5; 1, с.479-558] и риск-критерий Гурвица [1, с. 534-558]).

На наш взгляд заслуживает внимания использования парных *синтетических* критериев, составленных из выигрыш-крите- рия и риск-критерия, поскольку они дают возможность оценить оптимальность стра тегий с синтетической (совместной) точки зрения выигрышей и игровых рисков. Общий подход к конструированию таких критериев предложен в [1], а в работах [6] и [7] был введен в рассмотрение синтетический критерий Вальда-Сэвиджа. Для его описания напомним кратко необходимые определения.

Пусть в игре с природой $S^p = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ [1], $m \geq 2$, – множество альтернативных *чистых* стратегий игрока A; $\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_n$, $n \geq 2$, – состояния природы Π; действительные числа a_{ij}, $i \in I = \{1, 2, ..., m\}$, $j \in J = \{1, 2, ..., n\}$, – выигрыши игрока A в игровой ситуации (A_i, Π_j), когда игрок A выбирает стратегию A_i, а природа находится в состоянии Π_j; $\beta_j = \max\{a_{ij} : i \in I\}$, $j \in J$ – показатель *благоприятности* состояния Π_j; $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, $i \in I, j \in J$ – риск неполучения игроком A при выборе им стратегии A_i наибольшего при состоянии природы Π_j выигрыша β_j [1, с.18-25; 8, с. 9-61].

По критерию Вальда [2; 1, с.273-308; 8, с.73-94; 9, с.330-347]: $W_i = \min\{a_{ij} : j \in J\}$ - показатель эффективности стратегии A_i, $i \in I$; $W_{S^p} = \max\{W_i : i \in I\}$ -цена игры во множестве S^p; стратегия A_k - оптимальна, если $W_k = W_{S^p}$; $\left(S^p\right)^{O(W)}$ - множество стратегий, оптимальных во множестве S^p.

По критерию Сэвиджа [3; 1, с. 308-349; 8, с. 95-120; 9,с. 348-370]: $Sav_i = \max\{r_{ij} : j \in J\}$ - показатель неэффективности стратегии A_i, $i \in I$; $Sav_{S^p} = \min\{Sav_i : i \in I\}$ - цена игры во множестве S^p; стратегия A_k оптимальна, если $Sav_k = Sav_{S^p}$; $\left(S^p\right)^{O(Sav)}$ – множество стратегий, оптимальных во множестве S^p.

Критерий *Вальда-Сэвиджа с выигрыш- показателем* $\alpha \in [0,1]$ определяется следующими составляющими:

$$(WSav)_i(\alpha) = \alpha W_i - (1-\alpha) Sav_i \qquad (1)$$

- показатель эффективности стратегии A_i, $i \in I$; цена игры определяется формулой

$$(WSav)_{S^p}(\alpha) = \max\{(WSav)_i(\alpha) : i \in I\}; \qquad (2)$$

стратегию A_k назовем оптимальной, если $(WSav)_k(\alpha) = (WSav)_{S^p}(\alpha)$; $\left(S^p\right)^{O((WSav)(\alpha))}$ – множество стратегий, оптимальных во множестве S^p.

Выигрыш-показатель $\alpha \in [0,1]$ и риск-показатель $(1-\alpha) \in [0,1]$ являются количественными индикаторами степени предпочтения, отдаваемого игрока A соответственно выигрышам и рискам.

Из (1) очевидно, что графиками показателей эффективности стратегий по критерию Вальда-Сэвиджа как линейных функций аргумента α являются m отрезков. Из (2) заключаем, что графиком цены игры является верхняя огибающая этих отрезков, представляющая собой ломаную, число звеньев l которой не превосходит m.

Определение 1. Будем говорить, что *в данной игре с природой критерий Вальда-Сэвиджа при фиксированном значении выигрыш-показателя* $\alpha \in (0,1)$ *обладает свойством синтезирования*, если найдется оптимальная по этому критерию стратегия, не являющаяся оптимальной ни по критерию Вальда, ни по критерию Сэвиджа.

В статье найдены необходимые и достаточные условия существования и единственности значения выигрыш-показателя, при котором критерий Вальда-Сэвиджа обладает свойством синтезирования.

[1] В обозначении S^p буква p - первая буква английского *pure* – чистый, указывает на то, что рассматриваемые в данной статье стратегии $A_1, A_2, \ldots, A_m$ являются *чистыми*, а не смешанными, т.е. выбираются игроком A *определенным* образом без примесей случайности и неопределенности.

Для формулировки соответствующих теорем определим следующие множества оптимальных стратегий и цены игры в этих множествах: $((S^p)^{O(W)})^{O(Sav)}$ - множество стратегий, оптимальных по критерию Сэвиджа во множестве $(S^p)^{O(W)}$; $Sav_{(S^p)^{O(W)}} = \min\{Sav_i : A_i \in (S^p)^{O(W)}\}$ – цена игры по критерию Сэвиджа во множестве $(S^p)^{O(W)}$; $((S^p)^{O(Sav)})^{O(W)}$ – множество стратегий, оптимальных по критерию Вальда во множестве $(S^p)^{O(Sav)}$; $W_{(S^p)^{O(Sav)}} = \max\{W_i : A_i \in (S^p)^{O(Sav)}\}$ – цена игры по критерию Вальда во множестве $(S^p)^{O(Sav)}$.

Определение 2. Будем говорить, что игра с природой *удовлетворяет условию* $\sigma_{(WSav)}$, если для каждой стратегии $A_i \notin (S^p)^{O(W)} \bigcup (S^p)^{O(Sav)}$ справедливо неравенство:

$$(Sav_{(S^p)^{O(w)}} - Sav_{S^p})W_i - \\ -(W_{S^p} - W_{(S^p)^{O(Sav)}})Sav_i \le \\ \le W_{(S^p)^{O(Sav)}} Sav_{(S^p)^{O(W)}} - W_{S^p} Sav_{S^p} \quad (3)$$

и найдется стратегия $A_k \notin (S^p)^{O(W)} \bigcup (S^p)^{O(Sav)}$, для которой неравенство (3) превращается в равенство.

Пусть

$$\alpha_{(WSav)} = \frac{Sav_{(S^p)^{O(W)}} - Sav_{S^p}}{(Sav_{(S^p)^{O(W)}} - Sav_{S^p}) + (W_{S^p} - W_{(S^p)^{O(Sav)}})},$$

$$\delta_{(WSav)} = \frac{W_{(S^p)^{O(Sav)}} \cdot Sav_{(S^p)^{O(W)}} - W_{S^p} \cdot Sav_{S^p}}{(Sav_{(S^p)^{O(W)}} - Sav_{S^p}) + (W_{S^p} - W_{(S^p)^{O(Sav)}})}$$

и $S^p_{\alpha_{(WSav)}} = \{A_i : (WSav)_i(\alpha_{(WSav)}) = \delta_{(WSav)}\}$ - множество стратегий, показатель эффективности которых по критерию Вальда-Сэвиджа при выигрыш-показателе $\alpha_{(WSav)}$ равен $\delta_{(WSav)}$.

Следующие две теоремы справедливы при условии, что в игре с природой не существует стратегии, оптимальной одновременно по критерию Вальда и по критерию Сэвиджа, и существует стратегия, не являющаяся оптимальной ни по критерию Вальда, ни по критерию Сэвиджа.

Теорема 1 (необходимые условия). *Если существует единственное значение выигрыш-показателя, при котором критерий Вальда-Сэвиджа обладает свойством синтезирования, то справедливы следующие утверждения*:

$a)$ *число* l *звеньев ломаной, представляющей график цены игры по критерию Вальда-Сэвиджа, равно* 2;

$b)$ *единственное значение выигрыш-показателя, при котором критерий Вальда-Сэвиджа обладает свойством синтезирования, равно* $\alpha_{(WSav)}$;

$c)$ *множество стратегий, оптимальных по критерию Вальда-Сэвиджа, имеет следующую структуру*:

$$(S^p)^{O((WSav)(\alpha))} = (S^p)^{O(Sav)}, \text{ при } \alpha = 0; \\ = ((S^p)^{O(Sav)})^{O(W)}, \text{ при } 0 < \alpha < \alpha_{(WSav)}; \\ = ((S^p)^{O(Sav)})^{O(W)} \bigcup ((S^p)^{O(W)})^{O(Sav)} \bigcup S^p_{\alpha_{(WSav)}}, \\ \text{при } \alpha = \alpha_{(WSav)}; \ = ((S^p)^{O(W)})^{O(Sav)}, \text{ при } \\ \alpha_{(WSav)} < \alpha < 1; \ = (S^p)^{O(W)}, \text{ при } \alpha = 1; \quad (4)$$

$d)$ *выполняется условие* $\sigma_{(WSav)}$.

Теорема 2 (достаточные условия). *Из каждого из следующих двух условий*

$a)$ *пусть множество* $S^p_{\alpha_{(WSav)}}$ *не пусто и множество* $(S^p)^{O((WSav)(\alpha))}$ *стратегий, оптимальных по критерию Вальда-Сэвиджа, имеет структуру* (4);

$b)$ *выполняется условие* $\sigma_{(WSav)}$,

следует, что $\alpha_{(WSav)}$ *является единственным значением выигрыш-показателя, при котором критерий Вальда-Сэвиджа обладает свойством синтезирования.*

Из теорем 1 и 2 следует, что условие $\sigma_{(WSav)}$ является необходимым и достаточным для существования и единственности значения выигрыш-показателя, при котором критерий Вальда-Сэвиджа обладает свойством синтезирования.

Наличие множества значений выигрыш-показателя, при которых существуют синтезированные стратегии, приводит к неопределённости выбора выигрыш-показателя. Полученные результаты исключают указанную неопределённость, порождая при этом возможно другую неопределённость выбора стратегии из числа нескольких синтезированных стратегий, которые могут существовать при этом единственном значении выигрыш-показателя. Представленные результаты применимы к анализу любой задачи по принятию финансово-экономических решений в условиях неопределённости, допускающей применение модели «Игра с природой» с синтетическим критерием оптимальности Вальда-Сэвиджа.

Список источников

1. Лабскер Л.Г. Теория критериев оптимальности экономические решения. Монография. М.: КНОРУС. 2014. – 744 с.
2. Wald A. Statistical decision functions. N.Y.:Wiley; L.,Chapman & Hall. 1950. – 179 p.
3. Savage L.J. The theory of statistical decision. *J. Amer. Statist. Assoc.*1951;46;(1);55-67.
4. Hurwicz L. Optimality Criteria for Decision Making under Ignorance. *Cowles commission papers*.1951;(370).
5. Arrow K.J., Hurwicz L. An optimality criterion for decision making under Ignorance. Uncertainty and expectations in economics. Oxford: Basil Blackwell and Mott. 1972.
6. Лабскер Л.Г., Ященко Н.А., Амелина А.В. Оптимизация выбора корпоративного заёмщика банка на основе синтетического критерия Вальда-Сэвиджа. *Финансовая аналитика: проблемы и решения.* 2011;34(76);43-54.
7. Лабскер Л.Г., Ященко Н.А., Амелина А.В. Формирование приоритетной очередности кредитования банком корпоративных заёмщиков по синтетическому критерию Вальда-Сэвиджа. *Финансы и кредит*. 2012;38(518); 31-41.
8. Лабскер Л.Г., Ященко Н.А. Экономические игры с природой. Практикум с решениями задач. Под ред. Л.Г. Лабскера. М.: КНОРУС. 2015.-506 с.
9. Лабскер Л.Г., Ященко Н.А. Теория игр в экономике, финансах и бизнесе. Под ред. Л.Г. Лабскера. М.: КНОРУС. 2017.- 525 с.